АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА БЕЗКРАЕН ЛАБИРИНТ

По условието задачата до известна степен прилича на по-лесната си версия, която беше предназначена за група С. Особеността тук се крие в огромните ограничения за N и точно това би трябвало да затрудни състезателите. В този анализ е представено решение, използващо динамично оптимиране по профил.

Нека с $dp[i][j]$ да означим броя на възможните пътища в лабиринта, които завършват в клетката на i-ти ред и j-та колона, а ако съответната клетка е забранена то $dp[i][j]$ ще приема стойност 0. Необходимо е да се обърне внимание и на частните случаи, но рекурентната зависимост за "позволените" клетки в общия случай е:

$$dp[i][j] = \begin{cases} dp[i-1][j-1] + dp[i-1][j] + dp[i-1][j+1] + 1, & j \leq K \\ dp[i-1][j-1] + dp[i-1][j] + dp[i-1][j+1], & j > K \end{cases}$$

Зависимостта е очевидна. Използвайки единствено нея, бихме могли да съставим решение със сложност $O(M * N)$, което да премине тестовете от първата подзадача и да получи 17 точки.

Нека да разгледаме по-подробно цикличността на лабиринта със следния пример.

x	$x+y$	$2*x+2*y+z$	$2*x+2*y+z$
y	$x+y+z$		$3*x+4*y+3*z$
z	$y+z$	$x+2*y+2*z$	$x+2*y+2*z$

Дадено е произволно поле от лабиринта с три колони ($K = 3$). С буквите x, y, z сме означили dp-стойностите на клетките от последната колона на предишното поле. Тогава ние можем лесно да изразим чрез тях dp-стойностите на клетките от последната колона на текущото поле. Тъй като всички полета са еднакви, след като веднъж определим зависимостта, не е необходимо да преминаваме през всички колони на полетата отново. Това наблюдение ни дава възможността да спестим голяма част от операциите на предишното решение и да напишем ново със сложност $O(M^2 * K + M^3 * \frac{N}{K})$, което ще премине тестовете и от втората подзадача, получавайки 49 точки.

Нека да образуваме профили от крайните колони на всички полетата. Очевидно е неоптимално да пресмятаме всеки следващ профил от предишния, при условие че зависимостта никога не се променя. Ще въведем матрица F, която изразява прехода между два съседни профила. Ключовото наблюдение, което ни помага да решим задачата по-бързо е, че преходът между профил i и профил j ($i < j$) е въпросната матрица F, повдигната на степен $j - i$.

$$F^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ F^1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};\ F^2 = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 10 \\ 21 & 28 & 21 \\ 10 & 14 & 11 \end{pmatrix};\ F^3 = \begin{pmatrix} 72 & 98 & 73 \\ 147 & 196 & 147 \\ 73 & 98 & 74 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2*x+2*y+z \\ 3*x+4*y+3*z \\ x+2*y+2*z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 11*x+12*y+10*z \\ 18*x+21*y+18*z \\ 10*x+12*y+11*z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 74*x+98*y+73*z \\ 147*x+196*y+147*z \\ 73*x+98*y+74*z \end{pmatrix}$$

начален профил профил 1 профил 2 профил 3

АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
БЕЗКРАЕН ЛАБИРИНТ

Целта ни е от началния профил да намерим профила с индекс $r = \lfloor (N-1)/K \rfloor - 1$. Началния профил, който съответства на колона с номер K, намираме чрез рекурентната формула. По същия начин изчисляваме и колоната с номер N, имайки вече изчислен профила, съответстващ на последната колона на полето, преди това, в което се намира търсената. Така сведохме задачата до това да намерим F на степен r. Понеже r може да бъде много голямо число, трябва да се използва бързо повдигане на степен. Сложността на цялостното решение е $O(M^2 * K + M^3 * \log_2 \frac{N}{K})$.